

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = -7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Решение.
Из первого уравнения системы находим $y = -x - 7$.
Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 25; x^2 + 7x + 12 = 0,$$

откуда находим $x = -4, x = -3$. Таким образом, решение исходной системы $(-4; -3), (-3; -4)$.
Ответ: $(-4; -3), (-3; -4)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22

Расстояние между пристанями А и В равно 80 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 2 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 22 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.
Обозначим искомую скорость (в км/ч) за v . Плот прошёл 22 км, значит, он плыл 11 часов, а яхта 9 часов. Таким образом, имеем:

$$\frac{80}{v + 2} + \frac{80}{v - 2} = 9; 80v - 160 + 80v + 160 = 9v^2 - 36; 9v^2 - 160v - 36 = 0,$$

откуда находим $v = 18$.
Ответ: 18 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23

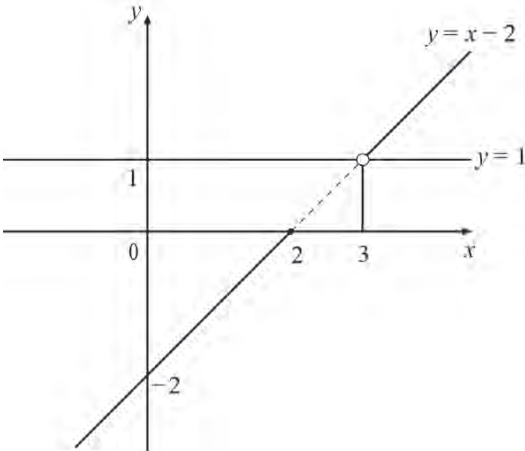
Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение.
Найдём область определения функции:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0; x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty) \text{ и } x - 3 \neq 0.$$

Значит, функция определена при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

Поскольку $\frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x - 2$. График изображён на рисунке.



Прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек при $a \in (0; 1]$.
Ответ: $a \in (0; 1]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

24 Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.

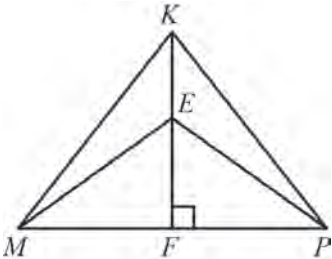
Решение.
Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $28 - a$, а площадь $a(28 - a)$. По теореме Пифагора:
$$pa^2 + (28 - a)^2 = 27^2; \quad a^2 + 2a(28 - a) + (28 - a)^2 = 2a(28 - a) + 27^2;$$
$$28^2 = 2a(28 - a) + 27^2; \quad a(28 - a) = \frac{28^2 - 27^2}{2} = 27,5.$$

Значит, искомая площадь равна 27,5.
Ответ: 27,5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На медиане KF треугольника MKP отмечена точка E . Докажите, что если $EM = EP$, то $KM = KP$.

Доказательство.

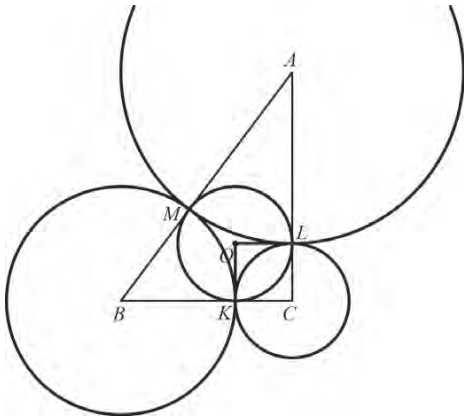


Поскольку треугольник MEP — равнобедренный, получаем, что его медиана EF также является высотой. Значит, в треугольнике MKP отрезок KF является высотой и медианой. Поэтому треугольник MKP — равнобедренный, то есть $KM = KP$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Три окружности, радиусы которых равны 2, 3 и 10, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Решение.



Стороны треугольника, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей, равны 5, 12 и 13. Поскольку $5^2 + 12^2 = 13^2$, этот треугольник прямоугольный. Площадь этого треугольника равна 30. В то же время, она равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр. Значит, искомый радиус равен $30 : \frac{5 + 12 + 13}{2} = 2$.

Ответ: 2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + y = -13, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $y = -5x - 13$.
Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем $25x^2 + 130x + 169 + x^2 = 13; x^2 + 5x + 6 = 0$,
откуда находим $x = -3, x = -2$. Таким образом, решение исходной системы $(-3; 2), (-2; -3)$.

Ответ: $(-3; 2), (-2; -3)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22 Расстояние между пристанями А и В равно 126 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 34 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим искомую скорость (в км/ч) за v . Плот прошёл 34 км, значит, он плыл 17 часов, а яхта 16 часов. Таким образом, имеем:

$$\frac{126}{v + 2} + \frac{126}{v - 2} = 16; 126v - 252 + 126v + 252 = 16v^2 - 64; 8v^2 - 126v - 32 = 0,$$

откуда находим $v = 16$.

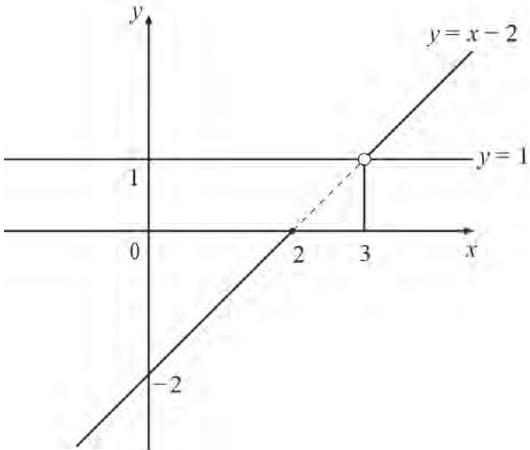
Ответ: 16 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23

Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

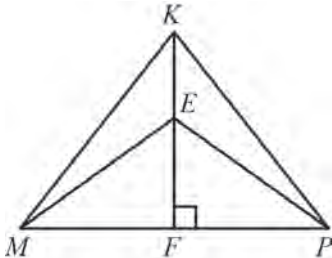
Решение.
Найдём область определения функции:
$$x^2 - 5x + 6 \geq 0; x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$
$$\text{и } x - 3 \neq 0.$$
Значит, функция определена при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.
Поскольку $\frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x - 2$. График изображён на рисунке.



Прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек при $a \in (0; 1]$.
Ответ: $a \in (0; 1]$.

25 На медиане KF треугольника MKP отмечена точка E . Докажите, что если $KM = KP$, то $EM = EP$.

Доказательство.

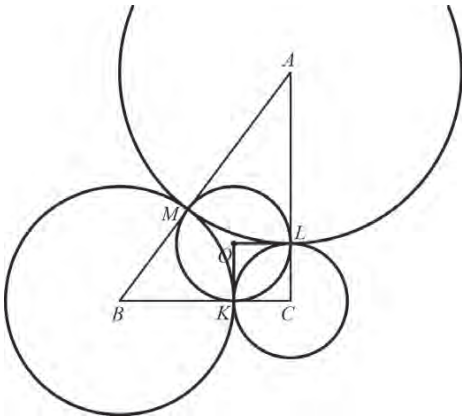


Поскольку треугольник MKP — равнобедренный, получаем, что его медиана KF также является высотой. Значит, в треугольнике MEP отрезок EF является высотой и медианой. Поэтому треугольник MEP — равнобедренный, то есть $EM = EP$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Три окружности, радиусы которых равны 2, 3 и 10, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Решение.



Стороны треугольника, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей, равны 5, 12 и 13. Поскольку $5^2 + 12^2 = 13^2$, этот треугольник прямоугольный. Площадь этого треугольника равна 30. В то же время, она равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр. Значит, искомый радиус равен $30 : \frac{5 + 12 + 13}{2} = 2$.

Ответ: 2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + y = -13, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Решение.
Из первого уравнения системы находим $y = -5x - 13$.
Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем
 $25x^2 + 130x + 169 + x^2 = 13; x^2 + 5x + 6 = 0$,
откуда находим $x = -3, x = -2$. Таким образом, решение исходной системы $(-3; 2), (-2; -3)$.
Ответ: $(-3; 2), (-2; -3)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22

Расстояние между пристанями А и В равно 80 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 2 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 22 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.
Обозначим искомую скорость (в км/ч) за v . Плот прошёл 22 км, значит, он плыл 11 часов, а яхта 9 часов. Таким образом, имеем:
 $\frac{80}{v+2} + \frac{80}{v-2} = 9; 80v - 160 + 80v + 160 = 9v^2 - 36; 9v^2 - 160v - 36 = 0$,
откуда находим $v = 18$.
Ответ: 18 км/ч.

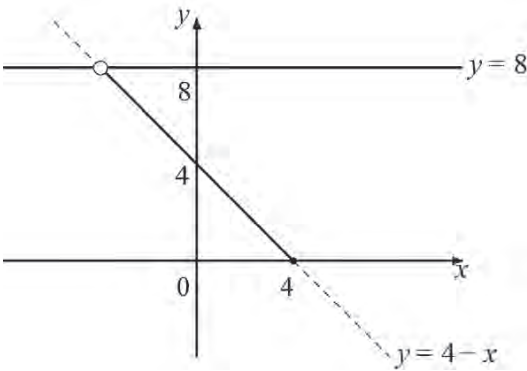
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23

Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{16 - x^2})^2}{x + 4}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.
Найдём область определения функции: $16 - x^2 \geq 0; x \in [-4; 4]$ и $x + 4 \neq 0$.
Значит, функция определена при $x \in (-4; 4]$.

Поскольку $\frac{(\sqrt{16 - x^2})^2}{x + 4} = \frac{16 - x^2}{x + 4} = 4 - x$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = 4 - x$.
График изображён на рисунке.



Прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $a \in [0; 8)$.
Ответ: $a \in [0; 8)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

24 Периметр прямоугольника равен 30, а диагональ равна 14. Найдите площадь этого прямоугольника.

Решение.
Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $15 - a$, а площадь $a(15 - a)$. По теореме Пифагора:

$$a^2 + (15 - a)^2 = 14^2; \quad a^2 + 2a(15 - a) + (15 - a)^2 = 2a(15 - a) + 14^2;$$
$$15^2 = 2a(15 - a) + 14^2; \quad a(15 - a) = \frac{15^2 - 14^2}{2} = 14,5.$$

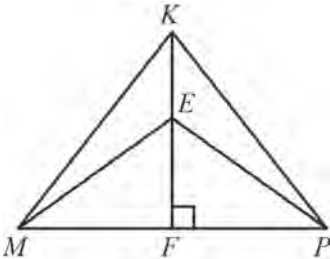
Значит, искомая площадь равна 14,5.

Ответ: 14,5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На медиане KF треугольника MKP отмечена точка E . Докажите, что если $EM = EP$, то $KM = KP$.

Доказательство.

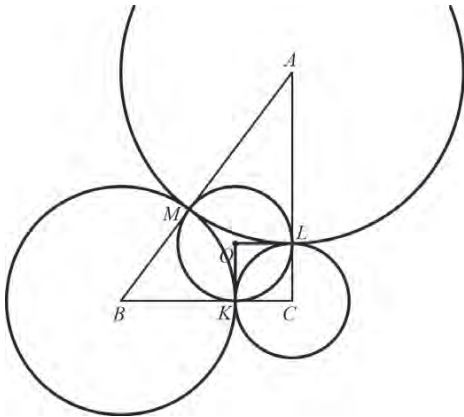


Поскольку треугольник MEP — равнобедренный, получаем, что его медиана EF также является высотой. Значит, в треугольнике MKP отрезок KF является высотой и медианой. Поэтому треугольник MKP — равнобедренный, то есть $KM = KP$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Три окружности, радиусы которых равны 3, 6 и 9, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Решение.



Стороны треугольника, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей, равны 9, 12 и 15. Поскольку $9^2 + 12^2 = 15^2$, этот треугольник прямоугольный. Площадь этого треугольника равна 54. В то же время, она равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр. Значит, искомый радиус равен $54 : \frac{9 + 12 + 15}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = -7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $y = -x - 7$.
Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 25; x^2 + 7x + 12 = 0$,
откуда находим $x = -4, x = -3$. Таким образом, решение исходной системы $(-4; -3), (-3; -4)$.
Ответ: $(-4; -3), (-3; -4)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22 Расстояние между пристанями А и В равно 126 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 34 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим искомую скорость (в км/ч) за v . Плот прошёл 34 км, значит, он плыл 17 часов, а яхта 16 часов. Таким образом, имеем:
 $\frac{126}{v + 2} + \frac{126}{v - 2} = 16; 126v - 252 + 126v + 252 = 16v^2 - 64; 8v^2 - 126v - 32 = 0$,
откуда находим $v = 16$.

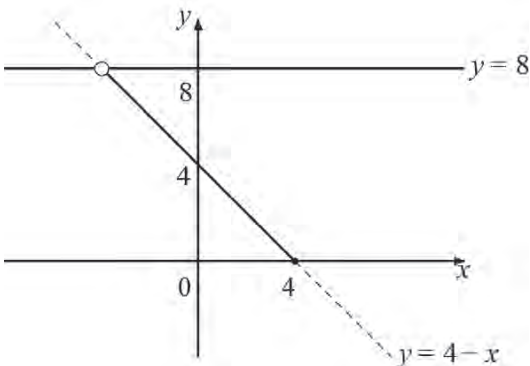
Ответ: 16 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23

Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{16 - x^2})^2}{x + 4}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.
Найдём область определения функции: $16 - x^2 \geq 0$; $x \in [-4; 4]$ и $x + 4 \neq 0$.
Значит, функция определена при $x \in (-4; 4]$.
Поскольку $\frac{(\sqrt{16 - x^2})^2}{x + 4} = \frac{16 - x^2}{x + 4} = 4 - x$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = 4 - x$.
График изображён на рисунке.



Прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $a \in [0; 8)$.
Ответ: $a \in [0; 8)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

24

Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.

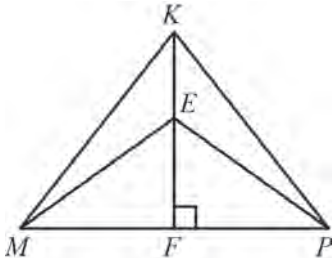
Решение.
Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $28 - a$, а площадь $a(28 - a)$. По теореме Пифагора:
$$a^2 + (28 - a)^2 = 27^2; \quad a^2 + 2a(28 - a) + (28 - a)^2 = 2a(28 - a) + 27^2;$$
$$28^2 = 2a(28 - a) + 27^2; \quad a(28 - a) = \frac{28^2 - 27^2}{2} = 27,5.$$

Значит, искомая площадь равна 27,5.
Ответ: 27,5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На медиане KF треугольника MKP отмечена точка E . Докажите, что если $KM = KP$, то $EM = EP$.

Доказательство.

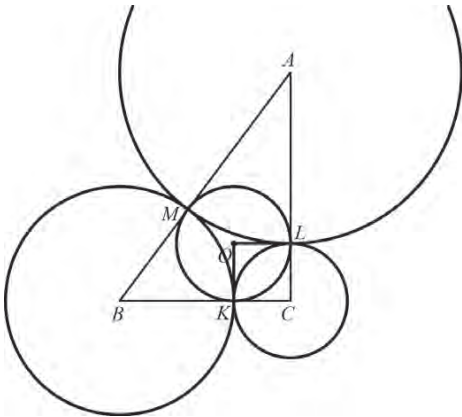


Поскольку треугольник MKP — равнобедренный, получаем, что его медиана KF также является высотой. Значит, в треугольнике MEP отрезок EF является высотой и медианой. Поэтому треугольник MEP — равнобедренный, то есть $EM = EP$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Три окружности, радиусы которых равны 3, 6 и 9, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Решение.



Стороны треугольника, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей, равны 9, 12 и 15. Поскольку $9^2 + 12^2 = 15^2$, этот треугольник прямоугольный. Площадь этого треугольника равна 54. В то же время, она равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр. Значит, искомый радиус равен $54 : \frac{9 + 12 + 15}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4