Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

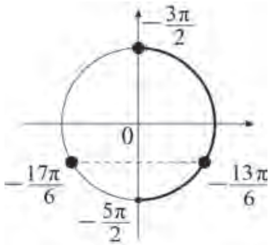
а) Сделаем замену $t = \frac{1}{\sin x}$. Получим квадратное уравнение относительно t:

$$t^2 + t - 2 = 0;\ (t-1)(t+2) = 0;$$

$$t = 1 \text{ или } t = -2;\ \sin x = 1 \text{ или } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$: $x = -\frac{13\pi}{6}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$.



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

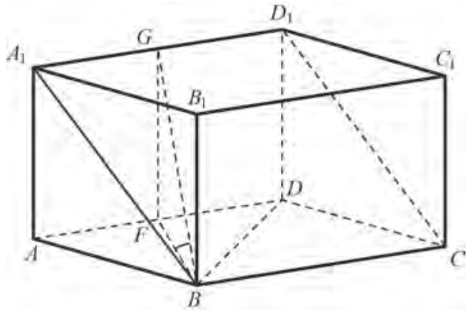
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ с углом A, равным $60°$, и стороной, равной 2. Найдите высоту призмы, если угол между плоскостями A_1BC и ABC равен $30°$.

Решение.

Поскольку призма прямая, то любая прямая, параллельная ребру AA_1, перпендикулярна плоскости ABC. Пусть G и F — середины рёбер A_1D_1 и AD соответственно, тогда $GF \parallel AA_1$ и поэтому GF – высота призмы и $GF \perp ABC$.

Поскольку BF – медиана правильного треугольника ABD, то BF – его высота, причём $BF = \sqrt{3}$. Значит, $FB \perp AD$. Отсюда $FB \perp BC$, поскольку $BC \parallel AD$. Прямая FB проекция прямой GB на плоскость ABC, следовательно, $GB \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах. Отсюда следует, что $\angle GBF$ линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями A_1BC и ABC. Из условия $\angle GBF = 30°$. Из прямоугольного треугольника GFB находим $GF = FB\,\mathrm{tg}30° = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$.



Ответ: 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0, \\ \dfrac{\left|x^2-2x-1\right|-2}{x}\ge 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$(x-\sqrt{10})(x+1)\le 0;\quad -1\le x\le \sqrt{10}.$$

Решим второе неравенство. Заменим в числителе разность разностью квадратов. Знак числителя при этом сохраняется.

$$\frac{\left(x^2-2x-1\right)^2-4}{x}\ge 0;\quad \frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-2x+1\right)}{x}\ge 0;\quad \frac{\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-1\right)^2}{x}\ge 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем: $-1\le x<0,\ \ x=1$ или $x\ge 3$.

Учитывая, что $3<\sqrt{10}$, находим решение системы:

$$-1\le x<0,\quad x=1,\quad 3\le x\le\sqrt{10}.$$

Ответ: $[-1;\ 0);\ 1;\ [3;\ \sqrt{10}]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Тангенс угла C треугольника ABC равен $\dfrac{2}{3}$, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB\ :\ DC=4\ :\ 9$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB=90^\circ$. Аналогично, $\angle ADC=90^\circ$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис. 1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис. 2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB — острый.

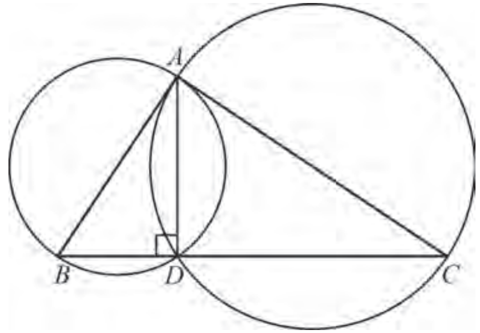


Рис. 1

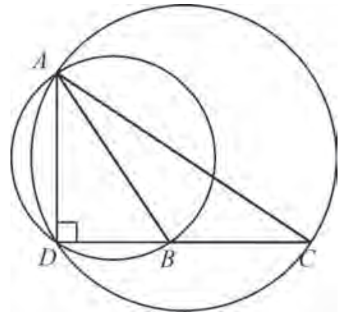


Рис. 2

Положим $DB=4t,\ \ DC=9t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ABD находим, что

$$AD=DC\,\mathrm{tg}ACB=9t\cdot\frac{2}{3}=6t,$$

$$AC=\sqrt{36t^2+81t^2}=3t\sqrt{13},$$

$$AB=\sqrt{36t^2+16t^2}=2t\sqrt{13}.$$

В первом случае $\angle BAC=90^\circ$, так как

$$AB^2+AC^2=13\cdot\left(9t^2+4t^2\right)=169t^2=BC^2.$$

Во втором случае по теореме синусов $\dfrac{\sin\angle A}{BC}=\dfrac{\sin\angle C}{AB}$; так как $\mathrm{tg}\angle C=\dfrac{2}{3}$, то $\sin\angle C=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, поэтому $\dfrac{\sin\angle A}{5t}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{2t\sqrt{13}}$, откуда находим, что $\sin\angle A=\dfrac{5}{13}$.

Ответ: 90° или $\arcsin\dfrac{5}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-2a(x+y)=-2a^2+a, \\ x^2+y^2+4a(x-y)=-8a^2+9a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем уравнения системы в виде

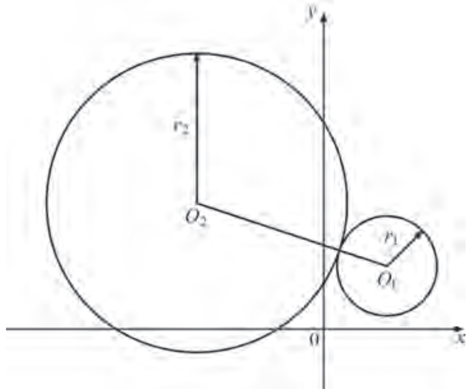
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-a)^2=a, \\ (x+2a)^2+(y-2a)^2=9a. \end{cases}$$

Если $a<0$, то система не имеет решений. Пусть $a=0$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x^2+y^2=0, \\ x^2+y^2=0, \end{cases}$$

и её решением является пара (0; 0), то есть при $a=0$ система имеет единственное решение.

При $a>0$ графиком каждого уравнения системы является окружность: первая с центром в точке $O_1(a;a)$ и радиусом $r_1=\sqrt{a}$; вторая с центром в точке $O_2(-2a;2a)$ и радиусом $r_2=3\sqrt{a}$. Заметим, что система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружности имеют единственную общую точку, то есть касаются друг друга.



Это выполняется только в двух случаях: когда $O_1O_2=r_1+r_2$ или $O_1O_2=|r_1-r_2|=r_2-r_1$, поскольку $\sqrt{a}<3\sqrt{a}$ при любых $a>0$. Имеем

$$O_1O_2=\sqrt{(-2a-a)^2+(2a-a)^2}=a\sqrt{10}.$$

Решим уравнения

$$3\sqrt{a}+\sqrt{a}=a\sqrt{10} \text{ и } 3\sqrt{a}-\sqrt{a}=a\sqrt{10} \text{ при условии } a>0.$$

Из первого уравнения следует, что $a=1,6$; из второго находим $a=0,4$.

Ответ: 0, 0,4 и 1,6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены два значения a из трёх. Случаи a=0 и a<0 не рассмотрены	3
С помощью верного рассуждения получены два значения a из трёх. Рассмотрен только один из случаев касания	2
Верно найдено только одно значение a из трёх	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Среднее арифметическое трёх натуральных чисел в $\frac{35}{11}$ раза больше, чем среднее арифметическое обратных чисел. Найдите эти натуральные числа.

Решение.

Назовем числа a, b, c. Пусть для определенности $a \le b \le c$.

Составим равенство и проведем преобразования:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{35}{11} \cdot \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}; \quad a+b+c = \frac{35}{11} \cdot \frac{bc+ac+ab}{abc};$$

$$abc = \frac{35}{11} \cdot \frac{bc+ac+ab}{a+b+c} \le \frac{35}{11} \cdot \frac{bc+ac+c^2}{a+b+c} = \frac{35}{11}c.$$

Тогда $ab \le \frac{35}{11} < 4$.

Возможны варианты:

1) $a = 1,\ b = 1$.

2) $a = 1, b = 2$,

3) $a = 1, b = 3$.

В случае $a = 1,\ b = 1$ из равенства $a+b+c = \frac{35}{11} \cdot \frac{bc+ac+ab}{abc}$

получаем

$$2+c = \frac{35}{11} \cdot \frac{2c+1}{c}; \quad 11c^2 - 48c - 35 = 0.$$

Натуральный корень $c = 5$.

Если $a = 1, b = 2$, то $3+c = \frac{35}{11} \cdot \frac{3c+2}{2c}$; $22c^2 - 39c - 70 = 0$. Натуральных корней нет.

Если $a = 1, b = 3$, то $4+c = \frac{35}{11} \cdot \frac{4c+3}{3c}$; $33c^2 - 8c - 105 = 0$. Натуральных корней нет.

Ответ: 1, 1 и 5.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен правильный ответ	4
Доказано, что наименьшее число равно 1, а второе число не больше 3. Решение не закончено	3
Доказано, что наименьшее число равно 1, и подбором найдены два других числа	2
Доказано, что наименьшее число равно 1	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

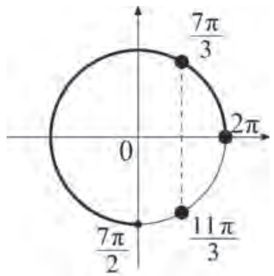
а) Сделаем замену $t = \frac{1}{\cos x}$. Получим квадратное уравнение относительно t:

$$t^2 - 3t + 2 = 0; \quad (t-1)(t-2) = 0;$$

$$t = 1 \text{ или } t = 2; \ \cos x = 1 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x = 2\pi n$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$: $x = \frac{7\pi}{3}$; $x = 2\pi$.



Ответ: а) $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{7\pi}{3}$.

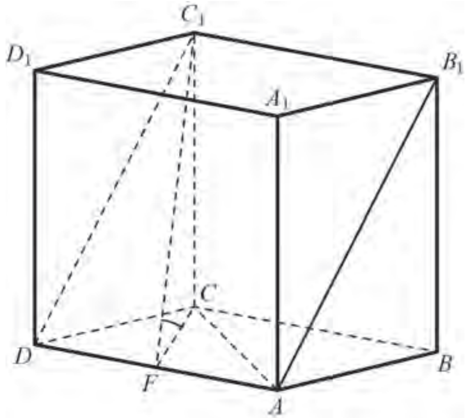
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ с углом A, равным $120°$, и стороной, равной 4. Найдите высоту призмы, если угол между плоскостями ADC_1 и ABC равен $60°$.

Решение.

Поскольку призма прямая, то боковое ребро CC_1 перпендикулярно плоскости ABC, и поэтому CC_1 — высота призмы, $CC_1 \perp (ABC)$. Пусть F середина ребра AD тогда CF медиана правильного треугольника ACD и, значит, CF его высота, причём $CF = 2\sqrt{3}$.

Поскольку CF проекция C_1F на плоскость ABC и $CF \perp AD$, то $C_1F \perp AD$ по теореме о трёх перпендикулярах. Отсюда следует, что $\angle C_1FC$ линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ADC_1 и ABC. Из условия $\angle C_1FC = 60°$. Из прямоугольного треугольника C_1CF находим $CC_1 = CF\,\mathrm{tg}60° = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$.



Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15} \le 0, \\ \dfrac{2-\left|x^2-4x+2\right|}{3-x} \le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$(x-\sqrt{15})(x+2) \le 0;\quad -2 \le x \le \sqrt{15}.$$

Решим второе неравенство. Заменим в числителе разность разностью квадратов. Знак числителя при этом сохраняется.

$$\frac{4-\left(x^2-4x+2\right)^2}{3-x} \le 0;\quad \frac{\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4x+4\right)}{x-3} \le 0;\quad \frac{x(x-4)(x-2)^2}{x-3} \le 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем: $x \le 0$, $x = 2$, $3 < x \le 4$.

Учитывая, что $3 < \sqrt{10}$, находим решение системы:

$$-2 \le x \le 0,\quad x = 2,\quad 3 < x \le \sqrt{15}.$$

Ответ: $[-2;\ 0]$; 2; $(3;\ \sqrt{15}]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Тангенс угла C треугольника ABC равен $\frac{3}{4}$, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 9 : 16$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB = 90°$. Аналогично $\angle ADC = 90°$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис. 1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис. 2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как. угол ACB острый.

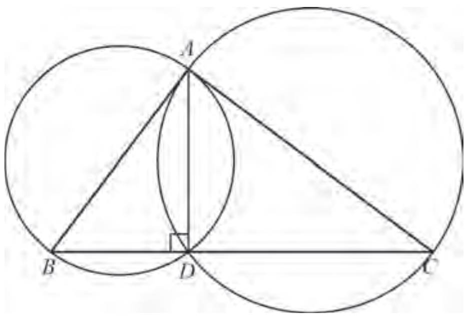


Рис. 1

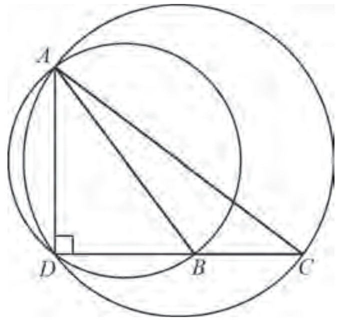


Рис. 2

Положим $DB = 9t$, $DC = 16t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ABD находим, что

$$AD = DC\,\mathrm{tg}ACB = 16t\cdot\frac{3}{4} = 12t,$$

$$AC = \sqrt{144t^2 + 256t^2} = 20t,$$

$$AB = \sqrt{144t^2 + 81t^2} = 15t.$$

В первом случае $\angle BAC = 90^\circ$, так как $AB^2 + AC^2 = 25^2\cdot t^2 = BC^2$.

Во втором случае по теореме синусов $\frac{\sin\angle A}{BC} = \frac{\sin\angle C}{AB}$; так как $\mathrm{tg}\angle C = \frac{3}{4}$, то $\sin\angle C = \frac{3}{5}$, поэтому $\frac{\sin\angle A}{7t} = \frac{\frac{3}{5}}{15t}$, откуда находим, что $\sin\angle A = \frac{7}{25}$.

Ответ: $90°$ или $\arcsin\frac{7}{25}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4a(x-y) = -8a^2 + 2a, \\ x^2 + y^2 - 8a(x+y) = -32a^2 + 18a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Запишем уравнения системы в виде

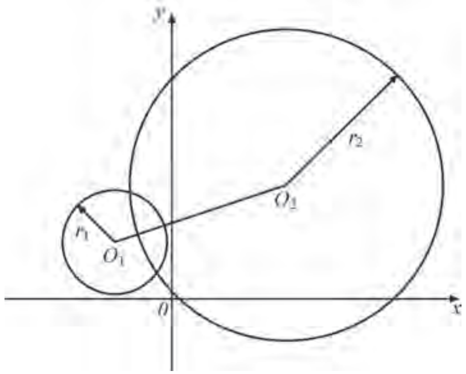
$$\begin{cases} (x+2a)^2 + (y-2a)^2 = 2a, \\ (x-4a)^2 + (y-4a)^2 = 18a. \end{cases}$$

Если $a < 0$, то система не имеет решений. Пусть $a = 0$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

и её решением является пара $(0;\ 0)$, то есть при $a = 0$ система имеет единственное решение.

При $a > 0$ графиком каждого уравнения системы является окружность: первая с центром в точке $O_1(-2a;\ 2a)$ и радиусом $r_1 = \sqrt{2a}$; вторая с центром в точке $O_2(4a;\ 4a)$ и радиусом $r_2 = 3\sqrt{2a}$. Заметим, что система имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда окружности имеют ровно две общие точки.



Это выполняется, только если $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, поскольку $\sqrt{2a} < 3\sqrt{2a}$ при любых $a > 0$. Имеем

$$O_1O_2 = \sqrt{(4a+2a)^2 + (4a-2a)^2} = 2a\sqrt{10}.$$

Получаем неравенство $3\sqrt{2a} - \sqrt{2a} < 2a\sqrt{10} < 3\sqrt{2a} + \sqrt{2a}$, откуда $0,2 < a < 0,8$.

Ответ: $0,2 < a < 0,8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено верное множество, или отличающееся верного граничными точками. Случаи a=0 или a<0 не рассмотрены или рассмотрены с ошибкой	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно неравенство из двух в двойном неравенстве ответа	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Среднее арифметическое четырёх натуральных чисел в $\frac{42}{17}$ раза больше, чем среднее арифметическое обратных чисел. Найдите эти натуральные числа.

Решение.

Обозначим числа a, b, c и d. Пусть для определенности $a \le b \le c \le d$. Тогда $ac \le bd$ и $ab \le cd$.

Составим равенство и проведем преобразования:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{42}{17\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right);$$

$$a+b+c+d = \frac{42}{17}\cdot\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd};$$

$$abcd = \frac{42}{17}\cdot\frac{bcd+acd+abd+abc}{a+b+c+d} = \frac{42}{17}\cdot\frac{(b+d)ac+(a+c)bd}{a+b+c+d}.$$

Поскольку $a \le b$ и $c \le d$, получаем

$$abcd \le \frac{42}{17}\frac{(b+d)bd+(a+c)bd}{a+b+c+d} = \frac{42}{17}bd, \quad \text{откуда } ac \le \frac{42}{17} < 3.$$

Аналогично, учитывая, что $a \le d$ и $b \le c$, находим

$$abcd = \frac{42}{17}\cdot\frac{(b+d)ac+(a+c)bd}{a+b+c+d} \le \frac{42}{17}\cdot\frac{(b+d)cd+(a+c)cd}{a+b+c+d} = \frac{42}{17}cd,$$

откуда $ab < 3$.

Возможны варианты:

1) $a = 1,\ b = 1, c = 1.$
2) $a = 1, b = 1, c = 2,$
3) $a = 1, b = 2, c = 2.$

В случае $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ из равенства $abcd = \frac{42}{17}\cdot\frac{bcd+acd+abd+abc}{a+b+c+d}$

получаем

$$\frac{3d+1}{3+d} = \frac{17}{42}d;\quad 17d^2 - 75d - 42 = 0.$$

Натуральных корней нет.

Если $a = 1, b = 1, c = 2$, то $\frac{5d+2}{4+d} = \frac{17}{42}\cdot 2d$; $17d^2 - 37d - 42 = 0$. Натуральный корень $d = 3$.

Если $a = 1, b = 2, c = 2$, то $\frac{8d+4}{5+d} = \frac{17}{42}\cdot 4d$; $17d^2 + d - 42 = 0$. Натуральных корней нет.

Ответ: 1, 1, 2, 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Доказано, что два наименьших числа равны 1. Решение не закончено	3
Доказано, что наименьшее число равно 1, и подбором найдены три других числа	2
Доказано, что наименьшее число равно 1	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4